

1. Izračunati

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - 5n})$$

2. Data je funkcija $f(x) = \sqrt{(x^2 - 9)^3}$.

a) Odrediti sve lokalne ekstremume date funkcije.

b) Odrediti sve prevojne tačke date funkcije.

3. Izračunati integral $\int \frac{8x-31}{x^2-9x+14} dx$

4. Naći partikularno rešenje diferencijalne jednačine $xy' + 2y = \cos x$ koje zadovoljava uslov $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

5. Slučajna promenljiva X ima zakon raspodele

$$X : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.25 & 0.15 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Odrediti matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive X.

1. Izračunati

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - 5n})$$

2. Data je funkcija $f(x) = \sqrt{(x^2 - 9)^3}$.

a) Odrediti sve lokalne ekstremume date funkcije.

b) Odrediti sve prevojne tačke date funkcije.

3. Izračunati integral $\int \frac{8x-31}{x^2-9x+14} dx$

4. Naći partikularno rešenje diferencijalne jednačine $xy' + 2y = \cos x$ koje zadovoljava uslov $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

5. Slučajna promenljiva X ima zakon raspodele

$$X : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.25 & 0.15 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Odrediti matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive X.

Rešenje:

1.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - 5n}) &= \infty - \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - 5n}) \cdot \frac{n + \sqrt{n^2 - 5n}}{n + \sqrt{n^2 - 5n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n + \sqrt{n^2 - 5n}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n/n}{(n + \sqrt{n^2 - 5n})/n} = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

2.

Domen funkcije:

$$(x^2 - 9)^3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 3 \Leftrightarrow D = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

a) Prvi izvod funkcije:

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x^2 - 9)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3x\sqrt{x^2 - 9}$$

Nule prvog izvoda:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x\sqrt{x^2 - 9} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \vee x = -3$$

Kako $x=0$ ne pripada domenu, kritične tačke su $x=3$ i $x=-3$.

Prvi izvod je negativan na $(-\infty, -3)$ pa funkcija $f(x)$ opada, a pozitivan na $(3, +\infty)$ pa funkcija $f(x)$ raste $\Rightarrow$ i za $x=-3$ i za $x=3$ funkcija $f(x)$ dostiže svoj lokalni minimum.

$$f(-3)=0 \text{ i } f(3)=0.$$

b) Drugi izvod funkcije:

$$f''(x) = 3\sqrt{x^2 - 9} + 3x \cdot \frac{1}{2}(x^2 - 9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3\sqrt{x^2 - 9} + 3x^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = 3 \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

Nule drugog izvoda:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Ni jedna od ove dve tačke ne pripada domenu tako da funkcija $f(x)$ nema prevojnih tačaka.

3.

$$x^2 - 9x + 14 = (x - 2)(x - 7)$$

$$\frac{8x-31}{(x-2)(x-7)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-7} = \frac{A(x-7)+B(x-2)}{(x-2)(x-7)}$$

$$8x - 31 = A(x - 7) + B(x - 2)$$

$$8x - 31 = (A + B)x - 7A - 2B$$

$$A + B = 8 \wedge -7A - 2B = -31 \Rightarrow A = 3, B = 5$$

$$\frac{8x-31}{x^2-9x+14} = \frac{3}{x-2} + \frac{5}{x-7}$$

$$\int \frac{8x-31}{x^2-9x+14} dx = \int \frac{3}{x-2} dx + \int \frac{5}{x-7} dx = 3\ln|x-2| + 5\ln|x-7| + C$$

4.

$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x}$ je linearna dif. jednačina.

$$y = e^{-\int \frac{2}{x} dx} (C + \int \frac{\cos x}{x} \cdot e^{\int \frac{2}{x} dx} dx)$$

$$= e^{-2\ln|x|} (C + \int \frac{\cos x}{x} \cdot e^{2\ln|x|} dx)$$

$$= \frac{1}{x^2} (C + \int \frac{\cos x}{x} \cdot x^2 dx)$$

$$= \frac{1}{x^2} (C + \int x \cos x dx)$$

Rešavamo parcijalnom integracijom: $u = x, du = dx, dv = \cos x dx, v = \sin x$

$$y = \frac{1}{x^2} (C + x \sin x - \int \sin x dx)$$

$$= \frac{1}{x^2} (C + x \sin x + \cos x) \text{ O.R. Kako je } y(\pi/2) = 0, \text{ dobijamo :}$$

$$0 = \frac{4}{\pi^2} (C + \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2})$$

$$\text{Odnosno, } C = -\frac{\pi}{2}, \text{ pa je: } y = \frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2} - \frac{\pi}{2x^2} \text{ P.R.}$$

5. $E(X) = 0.55$

$$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0.25 & 0.35 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$E(X^2) = 2.95$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = 2.95 - 0.55^2 = 2.6475$$